Kansrekening 23-08-'02

Tentamenopgave[1]

I

1. Gegeven zijn drie vasen. Vaas 1 bevat twee blauwe en vier rode ballen, vaas 2 bevat 4 blauwe en 2 rode ballen en vaas 3 bevat 2 blauwe en één rode bal. Eén van de vasen wordt op goed geluk gekozen en er wordt een bal uit getrokken. Wat is de kans dat de getrokken bal blauw is ?

2. Gegeven dat de getrokken bal blauw is, wat is de kans achteraf dat de gekozen vaas Vaas 3 is ?

3. Beschrijf een kansruimte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ die aan vraag 1. ten grondslag ligt.

II

1. Zij X een stochastische variabele gedefineerd op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zij c een getal ≥ 0. Geef een uitdrukking voor $P(X^2 \leq c)$ van de vorm $P(a \leq X \leq b)$.

We herinneren eraan dat de gammaverdeling $\gamma_{\alpha,\lambda}$, met parameters $\alpha > 0$ en $\lambda > 0$ de volgende dichtheid heeft:

$$\lambda^\alpha Y(x) \frac{x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \tag{1}$$

waar $Y = 1_{(0,+\infty)}$ de Heaviside functie is.

2. Zij Z een stochastische variabele met de gammaverdeling met dichtheid (1). Toon aan dat

$$E(Z) = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad E(Z^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}, \quad \sigma^2(Z) = \frac{\alpha}{\lambda^2}. \tag{2}$$

Aanwijzing: merk op dat $xx^{\alpha-1}Y(x)e^{-\lambda x}$ en $x^2x^{\alpha-1}Y(x)e^{-\lambda x}$ proportioneel zijn aan gammadichtheden, en gebruik de identiteit $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

3. Zij X een stochastische variabele met een normale verdeling met variantie σ^2, d.w.z. met de dichtheid

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} \tag{3}$$

Toon aan dat X^2 een gammaverdeling heeft. Aanwijzing: Het is bekend dat $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

4. Laat X en Y onafhankelijke stochastische variabelen zijn gelijk verdeeld, met de dichtheid (3). Toon aan dat $X^2 + Y^2$ negatief exponentieel verdeeld is.

5. Laat $\{X_n\}_{n\geq 1}$ een rij onafhankelijke gelijk verdeelde stochastische variabelen zijn met de verdeling met dichtheid (3). Bepaal de verdeling van

$$S_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2. \tag{4}$$

6. Bereken de variantie van S_n.

Aanwijzing: Bepaal de variantie van X_i^2 m.b.v. vraag 2.

7. Bepaal de limiet

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - n\sigma^2}{\sqrt{n}} \leq x) \tag{5}$$

[1]De onderdelen I en II zijn onafhankelijk.